数理解析研究所講究録
679巻 1989年 69-79

Harmonic Maps in 2 and 3 dimensions

東京大学 理学部　中島 啓
(Hiraku NAKAJIMA)

本稿の目的は、harmonic map の regularity に関する最近の結果（Brezis-Coron-Lieb, Hardt-Lin, Schoen-Uhlenbeck, etc）について紹介することである。

筆者は近年 Yang-Mills connection や Einstein metric について調べてきたが、幾何学に現われる楕円型偏微分方程式で非線型なものとしては、harmonic map は一番歴史が古い。筆者の上記2つの方程式に対するアプローチも harmonic map の場合が見本になることが多かった。実際、解のアプリオリ評価を得るテクニックなどの純解析的な部分はどの場合も全く同じであると言ってよく、違いが生じるのはアプリオリ評価から幾何的な結論を導くところだけである。しかし本質的なのはその部分であって、そこに面白さがある。従ってこのノートでも評価の出し方などには一切ふれず、幾何的に面白いと思われる部分に限って述べることにする。

記号を準備する。

- ▷ X : compact な Riemann 多様体。そのときどきに応じて境界のある場合とない場合の両方を考える。
- ▷ M : compact な Riemann 多様体で境界は持たない。十分高い次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれているとしてよい。
- ▷ $f : X \to M$: 滑らかな写像
- ▷ $E(f)$: f のエネルギー。すなわち

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_X |df|^2 dV \quad .$$

例えば、X としては、三次元の単位球 D^3 や二次元球面 S^2, M としては、N 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の単位球面 S^{N-1} などを考える。

f が <u>harmonic map</u> であるとは、エネルギー E の臨界点であるときを言う。Euler-Laglauge 方程式を書き下すと、

$$(☆) \quad \Delta f - \mathrm{tr}\, A_{f(x)}(df.*, df.*) = 0$$

となる。但しここで A は $M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の第二基本形式である。例えば $M = S^{N-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ の場合には、$f \in N$ 次元のベクトル値関数で、$|f| = 1$ をみたしていて、微分方程式

$$\Delta f + |df|^2 f = 0$$

の解が harmonic map に他ならない。（方程式の具体的な形は，問題にはならないので上の例だけを考えておけば十分である。）

harmonic map の具体的な例としては，

① $X=S^2$, $M=S^2$ のとき，それぞれを一次元の複素射影空間と思ったときの正則写像。

② $X=S^1$, $M=$ 一般のとき，$f: S^1 \to M$ 閉測地線で長さが一定のもの

などがある。

一番はじめに考えるべき問題として，

問．X や M にいかなる幾何的条件を課せば，その間に harmonic map が存在するか？

がある。X，M に何の条件もおかず一般に☆の方程式を解こうとしても無駄な努力なので，何らかの "幾何的条件" をおいて，存在を言って，さらにその harmonic map の性質を調べることによって今度は逆に，X や M の性質を導き出そうというものである。このようなアプローチとして次の様なものが今までにあった。

① [Eells-Sampson] Mの断面曲率が非正であれば、XからMへのすべてのhomotopy classにharmonic mapがある。[Siu]はこれを用いて、hermitian symmetric spaceのstrong rigidityと呼ばれる性質を示した。

② [Sacks-Uhlenbeck] $X=S^2$, $\pi_2(M)\neq 0$ の時、$f: S^2\to M$ harmonic mapで定値写像を除くとエネルギーが最小となっているものがある。[Siu-Yau]はこれを用いて、Frankelの予想：MがKähler多様体でbisectional curvatureが正であれば、Mは射影空間と双正則？ を肯定的に解いた。

③ [Micallef-Moore] $X=S^2$, $\pi_k(M)\neq 0$ $(k\geqq 2)$ の時、$f: S^2\to M$ harmonic mapで定値写像でなく index $\leqq k-2$ のものが存在する。（ここではindexの定義はしない。原論文を参照して欲しい。$k=2$ の時は、②と同じである。）彼らはこれを用いて、Mがpositive curvature operatorをもつ単連結リーマン多様体ならば、球面と同相であることを示した。

以上の例ですべて特徴的なのは、値域となる多様体Mの幾何的性質、特に曲率の符号が重要であることである。一般的にharmonic mapは値域の幾何を一番色濃く反映するということが言えそうである。$X=S^1$ でMの閉測地線を調べる場合を考えても納得がいく。

さて先の問に戻り，ここでは変分法の直接法を用いることにする。舞台となるソボレフ空間（の閉集合を）

$$L^{1,2}(X,M) := \{ f \in L^{1,2}(X : \mathbb{R}^N) \mid f(x) \in M \quad a.a.\ x \in X \}$$

で定義する。（Mは，$\mathbb{R}^N$に埋め込まれていた。）他にもいろいろ考えられる（[White] を見よ）がここでは上のものを採用する。エネルギー E は自然に $L^{1,2}(X,M)$ に拡張される。しかし，$C^\infty(X,M) = \{X$からMへの滑らかな写像の全体$\}$が $L^{1,2}(X,M)$ で dense とは限らぬことを注意しておく。（例えば [Schoen-Uhlenbeck]，[White] を見よ。）

境界条件として $\varphi \in L^{1,2}(X,M)$ を一つ fix し，次を満たす $f \in L^{1,2}(X,M)$を取ってくる。

$$E(f) = \inf \{ E(u) : u \in L^{1,2}(X,M),\ u - \varphi \in L_0^{1,2}(X : \mathbb{R}^N) \}$$

このような f を <u>energy-minimizing</u> という。但し，ここで注意しなければならないことがある。$\partial X = \phi$ の時には，f としては必ず定値写像がでてきてしまうので面白くない。意味のある写像 f を得るためには，homotopy class を指定することが必要であるが，Sobolev空間の元に対して homotopy class は意味を持たないので，工夫が必要である。しかし，ここでは，[White]の解答があるということだけ言ってこれ以上深く立ち

入らないことにする。従って次の問題は、

問. energy minimizing map f はどれぐらい regular か?

次の記号を導入しよう。

$\mathrm{Reg}(f)=\{x\in X : f$ は x の近傍で smooth $\}$

$\mathrm{Sing}(f)=X\setminus\mathrm{Reg}(f)$

次の結果は基本的であり出発点であった。

定理([Schoen-Uhlenbeck])

① $\dim\mathrm{Sing}(f)\leqq\dim X-3$ (特に $\dim X=2$ のときは $\mathrm{Sing}(f)=\phi$)

但し dim は Hausdorff dimension である。

② 境界条件 φ が滑らかならばある U : ∂X の近傍が存在して $U\cap\mathrm{Sing}(f)=\phi$ となる。

③ $\underbrace{\dim X=3 \text{ のとき}}_{\text{②と同じ仮定のもと}}$, $\mathrm{Sing}(f)$ は有限集合。

次に $\dim X=3$ のとき $\mathrm{Sing}(f)$ で何が起こっているかを詳しく見ることにする。記号を簡単にするため、$X=D^3$ とし、原点 0 にのみ $\mathrm{Sing}(f)$ があるとする。このとき、ある 0 に収束する数列 $\{\lambda_i\}$ が存在して、写像 $f_{\lambda_i}(x):=f(\lambda_i x)$ が $i\to\infty$ のときに $f_0\in L^{1,2}(D;M)$ に収束して、f_0 は次をみたす。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_0}{\partial r}\equiv 0, & f_0 \text{ は原点にのみ singularity をもつ。}\\ f_0 \text{ は } L^{1,2}(D;M) \text{ で energy minimizing である。}\end{cases}$$

このようなf_0を minimizing tangent map (MTM) という。もともとfが原点に singularity を持たないとすると，f_0は定値写像となる。逆に，f_0が定値写像であればfは原点に singularity を持たない。したがって次が分かる。

定理 [Schoen - Uhlenbeck]

① 定値写像以外に MTM を持たない多様体 M に値域をもつ energy-minimizing map f は滑らか。

② 滑らかでない energy-minimizing map があれば，定値写像でない MTM が存在する。

もちろん①と②は同値であるがそれぞれに重要で，①をみたす多様体の例として，断面曲率が非正の多様体があり，②をみたす多様体の例として，$\pi_2(M) \neq 0$ の多様体（すなわち，境界条件のφを，$\pi_2(M)$ の元として0でないものをとってきて，energy-minimizing map をさがすと滑らかにはなりえない）があるので，[Eells - Sampson] や [Sacks - Uhlenbeck] の結果を含むのである。（MTM は S^2からの harmonic map を radial に拡張したものになっている。）

結局，次の問題に帰着されたことになる。

問. MTM を分類せよ。

一番簡単（と思われる）場合の $M = S^2$ の時には次の結果が最近得られた。

<u>定理</u> [Brezis–Coron–Lieb]

$f_0 : D^3 \to S^2$ が MTM であるとすると、ある S^2 の isometry R が存在して、$f_0(x) = R \circ x/|x|$ となる。

この定理についてはいくつかの紹介もあるので、証明は述べないことにする。しかし、$S^2 \to S^2$ の harmonic map が、正則写像として非常に多くあったのに対し、MTM が上の様に限られてしまったことは、MTM が単なる harmonic map よりも値域の多様体の幾何構造をより強く反映するためであると（少なくとも筆者には）思われる。従ってとりあえず次の問題を調べてみることは、意味があるだろう。

$\boxed{\text{問題}}$ 他の対称空間，特に hermitian 対称空間（射影空間など）について MTM を分類せよ。

筆者の感じでは、MTM の tangent vector は曲率が大きい方を向きやすいという性質があるように見える。従って、例えば Helgason 球（定義は [Helgason, Ch VII §11] を見よ。）が MTM を定めるかというような問題は手頃な演習になるのではないだろうか？

最後に次の問題を考える。

$\boxed{\text{問題}}$ Sing(f) の形状は？ 境界値が対称性を持てば、energy minimizing map も対称性を持つか？ Sing(f) の点の個数は何で評価できるか？

次の様な例が[Hardt-Lin]で構成された。

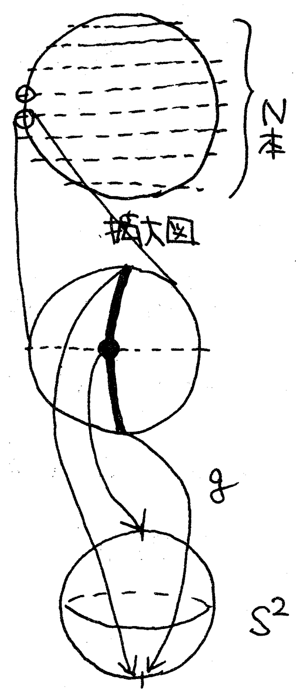
Example

$\forall N$：自然数が与えられたとき，$g: \partial D^3 \to S^2$ で次をみたすものが存在する。

1) g は homotopic to 0

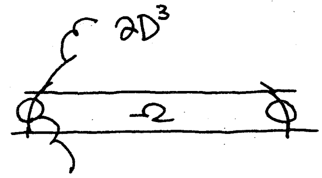
2) f が $f|_{\partial D} = g$ となる任意の energy-minimizing map とすると，f は少なくとも N 個の singularity を持つ。

3) $E(f) \leq C/N$ （f は 2) の通り）



絵を書いて説明すると，まず ∂D^3 を右図のように N 個の直線を引いて分ける。さらに直線と ∂D の交わりのまわりに小さな近傍をとる。（右図の小さな丸）それぞれの小さな円の外では g は，S^2 の南極に値をとるように，小さな円の中心では北極をとるように g を定める。小さな円の内部で S^2 をちょうど1回包むような感じにしておく。さらに，∂D^3 の対角線の2つの小さな円で，うまく cancel するように取って，g は homotopic to 0になるようにしておく。

さて，g を境界値にもつ energy minimizing map f を取ってこよう。Schoen-Uhlenbeck の結果により，f は D^3 に有限



個のsingularityしかもたない。したがって右図のような、2本の直線で、その上にはsingularityがのらないものがとれる。

右図の囲まれた領域をΩとすると、fはΩの境界で滑らかでしかも、$f|_{\partial\Omega}: \partial\Omega \to S^2$は$\partial\Omega = S^2$と思うと写像度が2となる。もし、$f$が$\Omega$にsingularityをもたないとすると、$f|_{\partial\Omega}$は$\Omega$に連続に拡張されることになって写像度が2になることに反する。従ってfはΩにsingularityをもつ。以上でfの構成ができた。

上の例では、gを$S^2 \to S^2$の写像と思うと、そのエネルギーは、どんどん大きくなっていく。実際に次が成立するようである。

<u>定理</u> [Almgren – Lieb]

$\# \mathrm{Sing}(f) \leqq C E(g)$ 　　(Cはある定数)

がすべての境界値gをもつenergy-minimizing map fについて成立つ。

1. F.Almgren and E.Lieb, *Singularities of energy-minimizing maps from the ball to the sphere*, Bull. of A. M. S. **17** (1987), 304–306.
2. H.Brezis, J.M.Coron and E.Lieb, *Harmonic maps with defects*, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649–705.
3. J.Eells and J.Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
4. R.Hardt and F.H.Lin, *A remark on H^1 mappings*, Manu. Math. **56** (1986), 1–10.
5. S.Helgason, "Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces," Pure and Appl. Math. Acad. Press, 1978.
6. M.Micallef and J.Moore, *Minimal two-spheres and the topology of manifolds with positive curvature on totally isotropic two-planes*, Ann. of Math. **127** (1988), 199–227.
7. J.Sacks and K.Uhlenbeck, *The existence of minimal immersions of 2-spheres*, Ann. of Math. **113** (1982), 1–24.
8. R.Schoen and K.Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 307–335.
9. ———————, *Boundary regularity and the Dirichlet problem for harmonic maps*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 253–268.
10. B.White, *Homotopy classes in Sobolev spaces and the existence of energy minimizing maps*. Acta Math. 1988.

これ以外に. Bull. of London Math. Soc の一番最近の号に出た Eells - Lemaire の survey があります。